Μάθημα 11ο 11/01/2018

Μέθοδος κανονικών εξισώσεων

$\min \|b - Ax\|$, $A^T A x = A^T b$, $A \in \mathbb{R}^{n,m}$, $m < n$.

QR: Αν $A = QR$, $Q \in \mathbb{R}^{n,m}$ $(Q^T Q = I_m)$, R άνω τριγωνικός με $r_{ii} > 0$ τότε το x που ελαχιστοποιεί την $\|b - Ax\|$ δίνεται από τη λύση του $\boxed{Rx = Q^T b}$

Θεώρημα:
Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,m}$, $m < n$ με γραμμικά ανεξάρτητες τις στήλες του a_i, $i = 1(1)n$, τότε υπάρχει μοναδικός πίνακας $Q \in \mathbb{R}^{n,m}$ με $Q^T Q = I_m$ και μοναδικός, άνω τριγωνικός πίνακας $R \in \mathbb{R}^{n,m}$ με $r_{ii} > 0$, $i = 1(1)n$ τέτοιος ώστε $A = QR$.

Απόδειξη:
Αν γίνεται η παραγοντοποίηση τότε θα ισχύει
$A = QR \Leftrightarrow$

άνω τριγωνικός

$$\Leftrightarrow [a_1 \, a_2 \ldots a_m] = [q^{(1)} \, q^{(2)} \ldots q^{(m)}] \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1m} \\ \vdots & r_{22} & & r_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{mm} \end{bmatrix}$$

$$r_{11} \cdot q^{(1)} = a_1 \Rightarrow \begin{cases} \|r_{11} q^{(1)}\| = \|a_1\| \Leftrightarrow r_{11} = \|a_1\| \\ q^{(1)} = \dfrac{a_1}{\|a_1\|} \rightarrow \text{κανονικοποίηση} \end{cases}$$

είναι ένα διάνυσμα με νόρμα 1.

άγνωστοι

$$\Leftrightarrow r_{12} = (a_2, q^{(1)})$$

$$r_{12} q^{(1)} + r_{22} q^{(2)} = a_2 \Rightarrow \begin{cases} r_{12} (q^{(1)}, q^{(1)}) + r_{22} (q^{(2)}, q^{(1)}) = (a_2, q^{(1)}) \\ \Leftrightarrow r_{22} q^{(2)} = a_2 - r_{12} q^{(1)} \Rightarrow \\ \Rightarrow r_{22} = \|a_2 - r_{12} q^{(1)}\| \end{cases}$$

Τότε $q^{(2)} = \dfrac{a_2 - r_{12} q^{(1)}}{r_{22}}$ $r_{22} \rightarrow$ αριθμός > 0

η τελευταία εξίσωση θα είναι:

$$r_{1m} q^{(1)} + r_{2m} q^{(2)} + \dots + r_{m-1,m} q^{(m-1)} + r_{mm} q^{(m)} = a_m$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_{im} = (a_m, q^{(i)}) , \quad i = 1(1)m-1 \\ r_{mm} = \| a_m - \sum_{i=1}^{m-1} r_{im} q^{(i)} \| \\ q^{(m)} = \dfrac{a_m - \sum_{i=1}^{m-1} r_{im} q^{(i)}}{r_{mm}} \end{cases}$$

Αλγόριθμος Gram-Schmidt ορθογωνοποίησης

<u>Δεδομένα:</u>

$A \in \mathbb{R}^{n,m}$ με γραμμικά ανεξάρτητες στήλες.

Για $i = 1(1)m$

  Για $j = 1(1)i-1$

    $r_{ji} = (a_i, q^{(j)})$

    $q^{(i)} = q^{(i)} - r_{ji} q^{(j)}$

  Τέλος 'Για'

  $r_{ii} = \| q^{(i)} \|$

  $q^{(i)} = \dfrac{q^{(i)}}{r_{ii}}$

Τέλος 'Για'

Κατά την i εξωτερική και j εσωτερική

$$q^{(i)} = a_i - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} q^{(k)}$$

$$(q^{(i)}, q^{(j)}) = (a_i, q^{(j)}) + \sum_{k=1}^{j-1} r_{ki}(q^{(k)}, q^{(j)}) = (a_i, q^{(j)})$$

Άσκηση

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \min_{x \in \mathbb{R}^3} \|b - Ax\|$$

- $q^{(1)} = a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad r_{11} = \|q^{(1)}\| = 2$

$$q^{(1)} = \frac{q^{(1)}}{r_{11}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

ορθοκανονικό

- $q^{(2)} = a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad r_{12} = (q^{(2)}, \underset{\text{ορθ/νο}}{q^{(1)}}) =$

$$= 3\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1)\left(\frac{-1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{12} = 4}$$

$q^{(i)} = q^{(i)} - r_{ji} q^{(j)}$

$$\text{Άρα } q^{(2)} = q^{(2)} - r_{12} q^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 - 4 \cdot 1/2 \\ 3 - 4 \cdot 1/2 \\ 1 - 4 \cdot 1/2 \\ -1 - 4(-1/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r_{22} = \|q^{(2)}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{22} = 2}$$

$$q^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$r_{ii} = \|q^{(i)}\|$

ορθ/νο

$$q^{(2)} = \frac{q^{(2)}}{r_{22}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow q^{(2)} = \begin{bmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\\1/2\end{bmatrix}$$

- $q^{(3)} = a_3 = \begin{bmatrix}4\\2\\0\\2\end{bmatrix}$

$$r_{13} = \left(q^{(3)}, \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ορθ/νο}}}{q^{(1)}}\right) = 4\cdot\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + \cancel{0\cdot\frac{1}{2}} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{13} = 2}$$

$$q^{(3)} = q^{(3)} - r_{13}q^{(1)} = \begin{bmatrix}4 - 2\cdot 1/2\\ 2 - 2\cdot 1/2\\ 0 - 2\cdot 1/2\\ 2 - 2\cdot(-1/2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\1\\-1\\3\end{bmatrix}$$

$$r_{23} = \left(q^{(3)}, q^{(2)}\right) = 4\,\frac{1}{2} + 2\,\frac{1}{2} + 0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\,\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{r_{23} = 4}$$

$$q^{(3)} = q^{(3)} - r_{23}\cdot q^{(2)} = \begin{bmatrix}3 - 4\cdot 1/2\\ 1 - 4\cdot 1/2\\ -1 - 4\cdot(-1/2)\\ 3 - 4\cdot 1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$r_{33} = \| q^{(3)} \| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{33} = 2}$$

ορθ/νο

$$q^{(3)} = \frac{q^{(3)}}{r_{33}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow q^{(3)} = \begin{bmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\1/2\end{bmatrix}$$

Άρα:

→ $$Q = [q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}] = \begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 1/2\\1/2 & 1/2 & -1/2\\1/2 & -1/2 & 1/2\\-1/2 & 1/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

(Q: ορθογώνιος πίνακας)

→ και $$R = \begin{bmatrix}2 & 4 & 2\\0 & 2 & 4\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$ (R: άνω τριγωνικός)

$$R = \begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13}\\0 & r_{22} & r_{23}\\0 & 0 & r_{33}\end{bmatrix}$$

$$Q^T b = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Άρα με τον αλγόριθμο Gram-Schmidt ορθογωνοποίησης βρήκαμε τα Q, R της QR-ανάλυσης.

Άρα: Βρήκαμε R, Q ($\Rightarrow Q^T$), $Q^T b$.

Μένει να λύσουμε το σύστημα: $Rx = Q^T b$.

$$Rx = Q^T b : \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ & 2 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^T = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Άρα: $$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$b - Ax = \begin{bmatrix} 1 - 3/2 \\ 1 - 1/2 \\ 1 - 1/2 \\ 1 - 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\| b - Ax \| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\det(A) \neq 0$, τότε υπάρχει ορθογώνιος $Q \in \mathbb{R}^{n,}$ και άνω τριγωνικός $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ τ.ω. $A = QR$

$$Ax = b \iff QRx = b \iff Rx = Q^T b$$

$$O(m^3)$$

<u>Γενικά:</u> Ο αλγόριθμος αυτός είναι ισοδύναμος με τον αλγόριθμο Gauss.

Πρόβλημα Εύρεσης Ιδιοτιμών - Ιδιοδιανυσμάτων

Μέθοδος Δυνάμεων

Έστω ότι $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

$\lambda_i \to$ πραγματική

$x_i \to$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

<u>Τότε:</u> $\lim_{m \to \infty} \frac{A^m x^{(0)}}{\|A^m \cdot x^{(0)}\|} = x_1 \quad \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

$$x^{(m)} = \frac{A^m \quad x^{(0)}}{\|A^m \cdot x^{(0)}\|}, \ m = 1, 2, \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{(m)} = \frac{Ax^{(m-1)}}{\|Ax^{(m-1)}\|}, \ m = 1, 2, \dots$$

Αλγόριθμος Μεθόδου Δυνάμεων με $\|\cdot\|_\infty$

<u>Δεδομένα</u>

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\varepsilon > 0$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $\|x^{(0)}\|_\infty = 1$

Για $m = 1$ έως ότου υπάρξει σύγκλιση

$|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}| \leq \varepsilon$

$\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\| \leq \varepsilon$

Εύρεση της συνιστώσας i ώστε $|x_i^{(m-1)}| = \|x^{(m)}\| = 1$

$$y^{(m)} = A x^{(m-1)}$$

$$\lambda^{(m-1)} = y_i^{(m)} / x_i^{(m-1)}$$

$$x^{(m)} = y^{(m)} / \|y^{(m)}\|_\infty$$

$A x_1 = \lambda_1 x_1$

$y^{(m)} = A x^{(m-1)}$

$\simeq \lambda_1 x^{(m-1)}$

Τέλος 'Για'

Άσκηση

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\boxed{i=2}$ $\underline{m=1}$. $y^{(1)} = A x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda^{(0)} = y_i^{(1)} / x_i^{(0)} \Rightarrow$

$\lambda^{(0)} = 2/1 \Rightarrow$

$\boxed{\lambda^{(0)} = 2}$

$$x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{\|y^{(1)}\|_\infty} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\|y^{(1)}\|_\infty = \max_i |y_i^{(1)}| = 2$$

$m=2$

- $\boxed{i=2}$: $y^{(2)} = Ax^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5/2 \end{bmatrix}$

$$\lambda^{(1)} = \frac{y_i^{(2)}}{x_i^{(1)}} = \frac{3}{1} = 3$$

$$x^{(2)} = \frac{y^{(2)}}{\|y^{(2)}\|_\infty} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 5/6 \end{bmatrix}$$

$m=3$

- $\boxed{i=2}$ $y^{(3)} = Ax^{(2)} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 7/2 \\ 10/3 \end{bmatrix}$

$$\lambda^{(2)} = \frac{y_i^{(3)}}{x_i^{(2)}} = \frac{7/2}{1} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

$$x^{(3)} = \frac{y^{(3)}}{\|y^{(3)}\|_\infty} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 20/21 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 3{,}618$, $\lambda_1 = \begin{bmatrix} 0{,}618 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Εφαρμογή του αλγορίθμου στον A^{-1} δίνει την μεγαλύτερη απόλυτα ιδιοτιμή του A^{-1} την μ_1,
τότε $\frac{1}{\mu_1}$ μεγαλύτερη απόλυτα ιδιοτιμή του A

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ με $\|\cdot\|_\infty$

Δεδομένα: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\varepsilon > 0$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$: $\|x^{(0)}\|_\infty = 1$

Για $m = 1$ έως ότου υπάρξει σύγκλιση

Ευρέση της συνιστώσας i ώστε:

$$|x_i^{(m-1)}| = \|x^{(m)}\| = 1$$

Λύση συστήματος $Ay^{(m)} = x^{(m-1)}$

$$\mu^{(m-1)} = y_i^{(m)} / x_i^{(m-1)}$$

$$x^{(m)} = \frac{y^{(m)}}{\|y^{(m)}\|_\infty}$$

Τέλος 'Για'

$$\lambda^{(m-1)} = \frac{1}{\mu^{(m-1)}}$$

$$\mu^{(m-1)} \approx 1/(\lambda_i - \sigma) \Leftrightarrow \lambda_i \approx 1/(\mu^{(m-1)} + \sigma)$$

(*) Αν πάρω τον πίνακα $A - \sigma I$

τότε όντως έχει ιδιοτιμές τις $\lambda_i - \sigma$

Τότε η λ_i είναι η πιο κοντινή στο σ

αν το $\lambda_i - \sigma$ είναι η μικρότερη απόλυτα ιδιοτιμή του $A - \sigma I$.